

Шәкір Айдос Ғанижанұлы



Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

1-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Метод Халецкого.

Цель лекции – Обучение методам решения систем линейных алгебраических уравнений

План лекции:

1. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
2. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Халецкого.
3. Контрольные вопросы.
4. Список литературы.

1 Метод Гаусса

Рассмотрим следующую *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). Для простоты рассуждений рассмотрим систему с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4, \end{cases} \quad (1.1)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – неизвестные переменные, a_{ij} – коэффициенты при переменных в уравнениях ($i = 1, 2, 3, 4$ номер уравнения, $j = 1, 2, 3, 4$ номер переменной), b_1, b_2, b_3, b_4 – свободные члены (правая часть уравнений).

Первый шаг

Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент). Разделив все коэффициенты первого уравнения системы (1.1) на a_{11} , получим

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{b_1}{a_{11}}. \quad (1.2)$$

Пользуясь уравнением (1.2), легко исключить из системы (1.1) неизвестную x_1 . Для этого достаточно:

1. Умножим уравнение (1.2) на a_{21}

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{21}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}, \quad (1.3)$$

из второго уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.3)

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ - \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{21}a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{21}b_1}{a_{11}},$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{22}^{(1)}}x_2 + \underbrace{a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{23}^{(1)}}x_3 + \underbrace{a_{24} - \frac{a_{21}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{24}^{(1)}}x_4 = \underbrace{b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}}_{b_2^{(1)}}. \quad (1.5)$$

2. Умножим уравнение (1.2) на a_{31}

$$a_{31}x_1 + a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{31}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{31}\frac{b_1}{a_{11}}, \quad (1.6)$$

из третьего уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.6)

$$\begin{aligned} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ - \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$a_{31}x_1 + \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{31}a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{31}b_1}{a_{11}},$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{32}^{(1)}}x_2 + \underbrace{a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{33}^{(1)}}x_3 + \underbrace{a_{34} - \frac{a_{31}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{34}^{(1)}}x_4 = \underbrace{b_3 - \frac{a_{31}b_1}{a_{11}}}_{b_3^{(1)}}. \quad (1.8)$$

3. Умножим уравнение (1.2) на a_{41}

$$a_{41}x_1 + a_{41}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{41}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{41}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{41}\frac{b_1}{a_{11}}, \quad (1.9)$$

из четвёртого уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.9)

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

$$-$$

$$(1.10)$$

$$a_{41}x_1 + \frac{a_{41}a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{41}a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{41}a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{41}b_1}{a_{11}},$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{42} - \frac{a_{41}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{42}^{(1)}}x_2 + \underbrace{a_{43} - \frac{a_{41}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{43}^{(1)}}x_3 + \underbrace{a_{44} - \frac{a_{41}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{44}^{(1)}}x_4 = b_4 - \underbrace{\frac{a_{41}b_1}{a_{11}}}_{b_4^{(1)}}. \quad (1.11)$$

В результате объединения выражений (1.9), (1.8) и (1.11) получаем систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = b_3^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = b_4^{(1)}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Второй шаг

Дальше, разделив далее коэффициенты первого уравнения системы (1.12) на «ведущий элемент» $a_{22}^{(1)}$, получим уравнение

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (1.13)$$

Пользуясь уравнением (1.13), легко исключить из системы (1.12) неизвестную x_2 . Чтобы добиться этого, достаточно:

1. Умножим уравнение (1.13) на на $a_{32}^{(1)}$

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{32}^{(1)}\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + a_{32}^{(1)}\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4 = a_{32}^{(1)}\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad (1.14)$$

из второго уравнения системы (1.12) вычесть уравнение (1.14)

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = b_3^{(1)}$$

$$-$$

$$(1.15)$$

$$a_{32}^{(1)}x_2 + \frac{a_{32}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + \frac{a_{32}^{(1)}a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4 = \frac{a_{32}^{(1)}b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$$

группируем по x_3, x_4

$$\underbrace{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{33}^{(2)}}x_3 + \underbrace{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{34}^{(2)}}x_4 = b_3^{(1)} - \underbrace{\frac{a_{32}^{(1)}b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{b_3^{(2)}}. \quad (1.16)$$

2. Умножим уравнение (1.13) на $a_{42}^{(1)}$

$$a_{42}^{(1)} x_2 + a_{42}^{(1)} \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + a_{42}^{(1)} \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = a_{42}^{(1)} \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad (1.17)$$

из третьего уравнения системы (1.12) вычтем уравнение (1.17)

$$\begin{aligned} a_{42}^{(1)} x_2 + a_{43}^{(1)} x_3 + a_{44}^{(1)} x_4 &= b_4^{(1)} \\ - \\ a_{42}^{(1)} x_2 + \frac{a_{42}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \frac{a_{42}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 &= \frac{a_{42}^{(1)} b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

группируем по x_3, x_4

$$\underbrace{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{33}^{(2)}} x_3 + \underbrace{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{34}^{(2)}} x_4 = \underbrace{b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{b_3^{(2)}}. \quad (1.19)$$

В результате объединения выражений (1.16) и (1.19) получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = b_3^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 = b_4^{(2)}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Третий шаг

Теперь, разделив далее коэффициенты первого уравнения системы (1.20) на «ведущий элемент» $a_{33}^{(2)}$, получим уравнение

$$x_3 + \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad (1.21)$$

Пользуясь уравнением (1.21), легко исключить из системы (1.20) неизвестную x_3 . Для выполнения этого умножим уравнение (1.20) на $a_{33}^{(2)}$

$$a_{33}^{(2)} x_3 + a_{33}^{(2)} \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 = a_{33}^{(2)} \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \quad (1.22)$$

из второго уравнения системы (1.20) вычтем уравнение (1.22)

$$\begin{aligned} a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 &= b_4^{(2)} \\ - \\ a_{33}^{(2)} x_3 + \frac{a_{33}^{(2)} a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 &= \frac{a_{33}^{(2)} b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

группируем по x_4

$$\underbrace{a_{44}^{(2)} - \frac{a_{33}^{(2)} a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}}_{a_{44}^{(3)}} x_4 = \underbrace{b_4^{(2)} - \frac{a_{33}^{(2)} b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}}_{b_4^{(3)}}. \quad (1.24)$$

В результате получим следующее уравнение

$$a_{44}^{(3)} x_4 = b_4^{(3)}. \quad (1.25)$$

Четвёртый шаг

Отсюда следует, что

$$x_4 = \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.26)$$

С помощью выражений (1.21) и (1.26) находим неизвестное x_3

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.27)$$

Далее с помощью выражений (1.13), (1.26) и (1.27) находим неизвестное x_2

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \left(\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right) - \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.28)$$

В заключение, используя формулы (1.2), (1.26), (1.27) и (1.28), определяем неизвестное x_1

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \left[\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \left(\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right) - \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right] - \frac{a_{13}}{a_{11}} \left[\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right] - \frac{a_{14}}{a_{11}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.29)$$

Следовательно, как видно из выражений (1.26), (1.27), (1.28) и (1.29), мы нашли решения системы линейных алгебраических уравнений (1.1).

Примечание. Метод Гаусса — один из классических алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Суть метода заключается в последовательном преобразовании системы к верхнетреугольному виду с последующим обратным ходом для нахождения всех неизвестных. Этот метод широко применяется благодаря своей универсальности и простоте алгоритма. Он подходит для систем любого размера, при условии, что определитель матрицы коэффициентов не равен нулю, и позволяет получить точное решение в случае СЛАУ с точными коэффициентами. К преимуществам метода Гаусса можно отнести универсальность, ясный пошаговый алгоритм, который легко реализуется на компьютере, и возможность точного решения для систем с точными данными. Однако метод имеет и недостатки. Он чувствителен к ошибкам округления при работе с числами с плавающей запятой, обладает высокой вычислительной сложностью для больших систем (примерно $O(n^3)$) и требует перестановки строк (частичный или полный выбор главного элемента) для устойчивости, что усложняет реализацию.

2 Метод Халецкого

Для удобства рассуждений истему линейных уравнений (1.1) запишем в матричном виде

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Представим матрицу $\mathcal{A}$ в виде произведения нижней треугольной матрицы

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

и верхней треугольной матрицы

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

с единичной диагональю, т. е.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}. \quad (2.5)$$

Тогда элементы матриц $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ определяются следующими формулами

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{11} = a_{11}, \mathbf{b}_{12} = 0, \mathbf{b}_{13} = 0, \mathbf{b}_{14} = 0 \\ \mathbf{b}_{21} = a_{21}, \mathbf{b}_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12}, \mathbf{b}_{23} = 0, \mathbf{b}_{24} = 0 \\ \mathbf{b}_{31} = a_{31}, \mathbf{b}_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12}, \mathbf{b}_{33} = a_{33} - b_{31}c_{13} - b_{32}c_{23}, \mathbf{b}_{34} = 0 \\ \mathbf{b}_{41} = a_{41}, \mathbf{b}_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12}, \mathbf{b}_{43} = a_{43} - b_{41}c_{13} - b_{42}c_{23}, \mathbf{b}_{44} = a_{44} - b_{41}c_{14} - b_{42}c_{24} - b_{43}c_{34} \end{cases} \quad (2.6)$$

и

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{11} = 1, \mathbf{c}_{12} = \frac{a_{12}}{b_{11}}, \mathbf{c}_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}}, \mathbf{c}_{14} = \frac{a_{14}}{b_{11}} \\ \mathbf{c}_{22} = 1, \mathbf{c}_{23} = \frac{a_{23} - b_{21}c_{13}}{b_{22}}, \mathbf{c}_{24} = \frac{a_{24} - b_{21}c_{14}}{b_{22}} \\ \mathbf{c}_{33} = 1, \mathbf{c}_{34} = \frac{a_{34} - b_{31}c_{14} - b_{32}c_{24}}{b_{33}} \\ \mathbf{c}_{44} = 1 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Отсюда искомый вектор $\mathbf{x}$ может быть вычислен из цепи уравнений

$$\mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathcal{C}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Тогда как матрицы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ треугольные, то системы (2.8) легко решаются, а именно

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{b_{11}}, \\ y_2 &= \frac{b_2 - b_{21}y_1}{b_{22}}, \\ y_3 &= \frac{b_3 - b_{31}y_1 - b_{32}y_2}{b_{33}}, \\ y_4 &= \frac{b_4 - b_{41}y_1 - b_{42}y_2 - b_{43}y_3}{b_{44}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

и

$$\begin{aligned} x_4 &= y_4, \\ x_3 &= y_3 - c_{34}x_4, \\ x_2 &= y_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4, \\ x_1 &= y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из формул (2.9) видно, что числа y_1, y_2, y_3, y_4 выгодно вычислять вместе с элементами матрицы $\mathcal{C}$.

Примечание. Метод Халецкого не использует выбор ведущего элемента, так как применяется только к симметричным положительно определённым матрицам. В отличие от LU-разложения с выбором ведущего элемента, метод Холецкого не требует перестановки строк.

3 Контрольные вопросы

1. В чём основные различия между методом Гаусса и Халецкого?
2. Какой метод требует меньше арифметических операций?
3. В каком случае метод Гаусса является более универсальным?
4. Для каких матриц применим метод Халецкого?
5. В чём заключается разложение Халецкого $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$?

4 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Список литературы

- [1] Копченова Н. В., Марон И. А. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие.* — СПб.: Издательство «Лань», 2019. — 368 с. 4
- [2] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы: Учебное пособие для вузов.*—М.: Наука, 1989.—432 с. 4
- [3] Киреев В. И., Пантелеев А. В. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие.* —СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с. 4
- [4] Jaan Kiusalaas. *Numerical methods in engineering with Python.* Cambridge University Press. 2013 4
- [5] Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики: учебное пособие.* — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 672 с. 4
- [6] Шакенов Қ.Қ. *Есептеу математикасы әдістері лекциялар курсы.* Алматы, 2019. — 193 б. 4
- [7] Сұлтанғазин Ө.М., Атанбаев С. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы.* - Алматы: Білім, - 2016. — 286 б. 4